Proyecto MaTEX

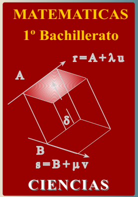
Límites-Continuidad

Fco Javier González Ortiz

Directorio

D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTEX

Límites y Continuidad

Tabla de Contenido

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

1. Introducción

El concepto de límite es el fundamento del cálculo. En el siglo XIX, eminentes matemáticos, Augustin-Louis Cauchy[1] y Karl Weiertrass[2] entre otros trataron de precisar el concepto de límite. Ellos lograron dar una definición rigurosa de límite, la definición $\epsilon - \delta$, que aunque la incluimos en este capítulo no es fundamental en un primer acercamiento intuitivo a dicho concepto.

El nivel de este capítulo es adecuado para alumnos de 4^o de ESO y 1^o de Bachillerato.

Se incluye en este capítulo también el estudio del concepto de continuidad de una función que está basado en el concepto de límite.

Se incide en la aplicación de los límites para la representación de funciones, sobre todo las racionales en el cálculo de las asíntotas, horizontales, verticales y oblicuas.

[1] Eminente matemático frances (1789-1857) que escribió mas de 700 artículos, y fue pintor, abogado y escalador.

[2] Eminente matemático alemán (1815-1897) que precisó la definición de continuidad.

2. ¿Qué es un límite?

Para una función matemática $y = f(x)$, en un punto $x = a$, la expresión «límite de $f(x)$ cuando x es tan próximo a **a** como queramos» ($x \to \mathbf{a}$), es el valor al que se aproxima la función cuando el valor de x se acerca a **a** tanto como se quiera, simbólicamente lo escribimos de la forma

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L}$$

- Así decimos que $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$ pues cuando $x \to 1$, $x^2 \to 1$,
- o también decimos que $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ pues cuando $x \to 2$, $x^2 \to 4$,
- o bien decimos que $\lim\limits_{x\to 5} x^3 = 125$ pues cuando $x \to 5$, $x^3 \to 125$.

Hay una definición formal de límite pero por su dificultad, en este nivel se puede prescindir de ella y trabajar de una forma intuitiva.

A continuación usaremos una técnica simple e intuitiva de calcular el límite diseñando una tabla de valores para la función. Vamos a verlo.

2.1. Cálculo de límites usando tablas

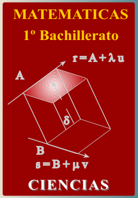
Ejemplo 2.1. Determinar $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ con una tabla de valores.

Solución: Con la ayuda de la calculadora o de un computador damos valores de x próximos a 1 por su izquierda y por su derecha.

$x \to 1^-$	$\dfrac{x^2-1}{x-1}$		$1^+ \leftarrow x$
0.9	1,9	2,1	1.1
0.99	1,99	2,01	1.01
0.9999	1,9999	2,0001	1.0001
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1^-	2	2	1^+

Esto parece indicar que cuando $x \to 1$ la función $\dfrac{x^2-1}{x-1} \to 2$.

▶ ATENCIÓN Notar que x puede acercarse a 1 tanto como se quiera, pero no puede ser 1 pues nos encontraríamos con la expresión $f(1) = \dfrac{0}{0}$ que no esta definida. □



Ejemplo 2.2. Hallar con una tabla $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x$.

Solución: Como antes, damos valores a x próximos a 0 por su izquierda y por su derecha.

$x \to 0^-$	$\operatorname{sen} x$		$0^+ \leftarrow x$
-0.1	-0.0998	0.0998	0.1
-0.01	-0.00999	0.00999	0.01
-0.001	-0.00099998	0.00099998	0.001
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
0^-	0	0	0^+

Se observa que para valores cada vez más próximos a 0, el valor de la función se aproxima más y más a su límite, que en este caso es 0, es decir

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$$

$\square$

El uso de tablas permite intuir al alumno la idea de aproximación de una manera mecánica, si bien para calcular límites no se utilizan. En su lugar usaremos reglas y técnicas que se exponen a continuación.

2.2. Algebra de los límites

A continuación se recogen las primeras reglas de paso al límite. Aunque tienen una estructura intuitiva sencilla, se demuestran con la definición rigurosa de límite, pero esta demostración está fuera del nivel de este curso.

Reglas del calculo de limites	
Regla de la suma	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$
Regla del producto	$\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$
Regla del cociente	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$
Regla de la potencia	$\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=[\lim\limits_{x\to a}f(x)]^{\lim_{x\to a}g(x)}$

A continuación se aplican estas reglas.

Ejemplo 2.3. Veamos algunos casos de como aplicar estas reglas:

$\lim\limits_{x\to 0}(x+1)$	$=\lim\limits_{x\to 0} x+\lim\limits_{x\to 0} 1$	$=0+1$	1
$\lim\limits_{x\to 1}(3\,x+x^2)$	$=\lim\limits_{x\to 1} 3\lim\limits_{x\to 1} x+\lim\limits_{x\to 1} x^2$	$=3\cdot 1+1$	4
$\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} x+\cos x)$	$=\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen} x+\lim\limits_{x\to 0}\cos x$	$=0+1$	1
$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x)$	$=\lim\limits_{x\to 1} x^2-\lim\limits_{x\to 1} 3x$	$=1-3$	-2
$\lim\limits_{x\to 4}(x^2\sqrt{x})$	$=\lim\limits_{x\to 4} x^2\cdot\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}$	$=16\cdot 2$	32
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{3x}$	$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1} x^2+1}{\lim\limits_{x\to 1} 3x}$	$=\dfrac{1+1}{3}$	$\dfrac{2}{3}$
$\lim\limits_{x\to 2}(3)^{x+1}$	$=[\lim\limits_{x\to 2} 3]^{\lim\limits_{x\to 2} x+1}$	$=3^3$	27
$\lim\limits_{x\to 2}(x+3)^{5x}$	$=[\lim\limits_{x\to 2} x+3]^{\lim\limits_{x\to 2} 5x}$	$=(2+3)^{10}$	5^{10}

3. Límites laterales

Hasta ahora, con las tablas hemos determinado el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ realizando los cálculos por ambos lados de a, por la izquierda cuando $x \to a^-$ y por la derecha cuando $x \to a^+$.

A partir de ahora escribiremos ambos límites laterales por la izquierda y derecha, abreviadamente como $f(a^-)$ y $f(a^+)$. Es decir

$$f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

$$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Como veremos en los ejemplos siguientes no siempre los límites laterales coinciden. En este caso diremos que el límite

$$f(a^-) \neq f(a^+) \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) \textbf{ no existe}$$

ya que los límites laterales son distintos.

También vamos a ver la interpretación geométrica de las funciones que en la proximidad de un punto presentan un comportamiento distinto, según nos aproximemos al valor de **a** por la izquierda o por la derecha .

Ejemplo 3.1. Realizar una tabla para hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

Solución: Recordemos que

$$|x| = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \end{cases}$$

$x \to 0^-$	$\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$		$0^+ \leftarrow x$
-0.5	-1	1	0.5
-0.1	-1	1	0.1
-0.001	-1	1	0.001

Esto indica que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Cuando los límites laterales de una función en un punto son distintos decimos que el límite no existe. Así, en este caso tenemos que

$$f(0^-) = -1 \neq f(0^+) = 1 \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

$\square$

Ejemplo 3.2. Veamos otro ejemplo de una función que tiene límites laterales distintos en un punto. Sea la función definida a trozos

Solución:

$$y = f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \leq 1 \\ x+1 & 1 < x \end{cases}$$

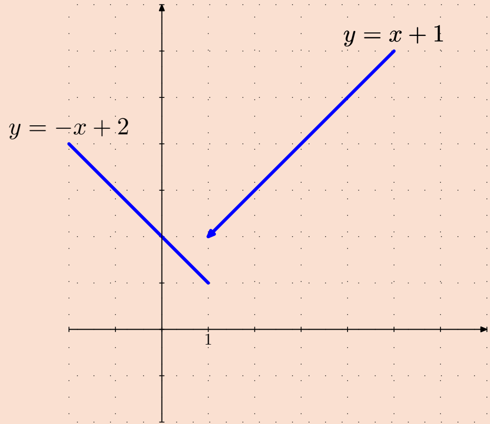
$$f(1^-) = \lim_{x \to 1^-} (-x+2) = 1$$

$$f(1^+) = \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2$$

$$f(1^-) \neq f(1^+)$$

luego

$$\nexists \lim_{x \to 1} (-x+2)$$



$\square$

Decimos que el límite existe cuando ambos límites laterales son finitos e iguales,

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \iff f(a^-) = f(a^+) = L}$$

◄ Doc Doc ►
Volver Cerrar

4. Límites Infinitos

Se presenta el caso que cuando $x \to a$ la función toma valores grandes y más grandes a medida que nos aproximamos a **a**, en este caso decimos que la función $f(x)$ diverge a ∞ en el punto $x = \mathbf{a}$. Veamos un ejemplo

Ejemplo 4.1. Hallar con una tabla $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

Solución: Tomamos valores próximos a 0

$x \to 0^-$	$\frac{1}{x^2}$		$0^+ \leftarrow x$
-0.1	100	100	0.1
-0.01	10^4	10^4	0.01
-0.0001	10^{16}	10^{16}	0.0001
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
0^-	∞	∞	0^+

A medida que $x \to 0^-$, o bien $x \to 0^+$, la función $f(x)$ se hace tan grande como se quiera, y decimos en este caso que la función

$$f(x) \text{ diverge a } \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

□

► Atención Cuando escribimos $\frac{1}{0} = \infty$ lo hacemos en el sentido anterior en el cálculo de un límite, pues recuerda que la división por 0 no está definida.

Ejemplo 4.2. Hallar con una tabla $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$

Solución: Damos valores próximos a 2

$x \to 2^-$	$\dfrac{1}{x-2}$		$2^+ \leftarrow x$
1.9	-10	10	2.1
1.99	-100	100	2.01
1.9999	-10^4	10^4	2.0001

A medida que $x \to 2^-$, la función $f(x)$ se hace tan grande y negativa como se quiera, y a medida que $x \to 2^+$, la función $f(x)$ se hace tan grande y positiva como se quiera, decimos que la función $f(x)$ diverge a ∞

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

□

El efecto gráfico de un límite infinito en un punto se indica con la presencia de las asíntotas verticales. Más adelante, en el apartado de las asíntotas, se explica la representación gráfica de los límites infinitos.

Ejercicio 1. Indicar en que puntos las funciones divergen a infinito:

a) $f(x) = \dfrac{2}{3x}$ *b*) $g(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$ *c*) $h(x) = \dfrac{x}{1+x}$

5. Límites en el Infinito

Si queremos estudiar el comportamiento de una función $f(x)$ cuando los valores de x se hacen tan grandes como queramos, lo expresamos diciendo que x tiende a infinito $x \to \infty$. Veamos un ejemplo;

Ejemplo 5.1. Hallar con una tabla $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$

Solución: Damos valores grandes positivos y negativos

$x \to -\infty$	$\frac{1}{x}$		$x \to \infty$
-10^2	$-0{,}01$	$0{,}01$	10^2
-10^4	$-0{,}0001$	$0{,}0001$	10^4
-10^{12}	-10^{-12}	10^{-12}	10^{12}

A medida que $x \to \infty$, o bien $x \to -\infty$, toma valores tan grandes como queramos positivos o negativos, la función $f(x)$ se hace tan pequeña como se quiera, y decimos en este caso que la función $f(x)$ tiende a 0

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

□

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 5.2. Estudiar el comportamiento en el infinito de

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

Solución: Se divide por la mayor potencia de x, y

$$f(x) = \frac{1 + \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{2}{x}}$$

si hacemos x tan grande como queramos, bien para valores positivos o negativos, observamos que los sumandos $\dfrac{1}{x}$ y $\dfrac{2}{x}$ se hacen tan pequeños como queramos. De este modo la función se aproxima a 1 tanto como queramos. En símbolos tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{2}{x}} = \mathbf{1}$$

$\square$

Ejercicio 2. Indicar el comportamiento de las funciones cuando x tiende a infinito:

a) $f(x) = \dfrac{2}{3x}$ *b*) $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ *c*) $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

6. Límites Indeterminados

Con las reglas que hemos aprendido de límites, se nos presentan situaciones más complicadas en las que no podemos dar la solución sin hacer un estudio detallado de la función. Por ejemplo

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}=\frac{0}{0}\qquad \textit{indeterminado}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{2x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to \infty}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to \infty}(2x^2-1)}=\frac{\infty}{\infty}\qquad \textit{indeterminado}$$

$$\lim_{x\to \infty}(x-\sqrt{x^2+1})=\infty-\infty\qquad \textit{indeterminado}$$

A continuación veremos las técnicas necesarias para resolver estos casos indeterminados

Casos Indeterminados		
$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty-\infty$

7. Cálculo de límites Indeterminados

En esta sección veremos las técnicas necesarias para calcular límites cuando se presenta el caso indeterminado. Básicamente aprenderemos la técnica de cálculo:

- Por descomposición en factores de un polinomio.
- Por producto y división de la mayor potencia de x.
- y por producto y división del conjugado de un binomio

Indeterminaciones		
$\dfrac{0}{0}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\infty - \infty$

Test. Responde a las siguientes preguntas.

1. Cuando en un límite encontramos $0 \times \infty$ el límite vale :

(a) 0 (b) ∞ (c) No se sabe

2. Cuando en un límite encontramos $-\infty \times \infty$ el límite vale :

(a) $-\infty$ (b) ∞ (c) 0 (d) no se sabe

3. Cuando en un límite encontramos $-\infty - \infty$ el límite vale :

(a) $-\infty$ (b) ∞ (c) 0 (d) no se sabe

4. Cuando en un límite encontramos $+\infty + \infty$ el límite vale :

(a) $-\infty$ (b) ∞ (c) 0 (d) no se sabe

5. Cuando en un límite encontramos $+\infty - \infty$ el límite vale :

(a) $-\infty$ (b) ∞ (c) 0 (d) no se sabe

6. Cuando en un límite encontramos $0 - \infty$ el límite vale :

(a) $-\infty$ (b) ∞ (c) 0 (d) no se sabe

7. Cuando en un límite encontramos $+\infty - 0$ el límite vale :

(a) $-\infty$ (b) ∞ (c) 0 (d) no se sabe

8. Cuando en un límite encontramos $\dfrac{\infty}{\infty}$ el límite vale :

(a) $-\infty$ (b) ∞ (c) 0 (d) no se sabe

7.1. Calculo de límites $\dfrac{0}{0}$

- **Por factorización**

  Consiste en descomponer los polinomios en factores.

Ejemplo 7.1. Calcular los siguientes límites factorizando y simplificando:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2-5x}{x^2-x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=\mathbf{2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=\mathbf{4}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x+2)}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-5x}{x^2-x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-5)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-5}{x-1}=\mathbf{5}$$

□

- **Por el conjugado**

  Consiste en multiplicar y dividir por el conjugado del denominador

Ejemplo 7.2. Calcular por el conjugado $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}&=\frac{0}{0} \qquad \text{por el conjugado}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\mathbf{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

□

Ejemplo 7.3. Calcular por el conjugado $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}&=\frac{0}{0} \qquad \text{por el conjugado}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}= \text{ operar}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(1+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\mathbf{1/2}\end{aligned}$$

□

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

7.2. Calculo de límites $\dfrac{\infty}{\infty}$

- **Por división de la mayor potencia**

Ejemplo 7.4. Para calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}=\frac{\infty}{\infty}\qquad \text{dividimos por } x$$

$$=\quad \lim_{x\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{x})}{1}=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})=\mathbf{1}$$

Ejemplo 7.5. Para calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}\qquad \text{dividimos por } x^2$$

$$=\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{2+0}{1+0}=\mathbf{2}$$

Ejemplo 7.6. Como en el caso anterior

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2+x}=\frac{\infty}{\infty}\qquad \text{dividimos por } x$$

$$=\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{\frac{2}{x}+1}=\frac{\sqrt{2+0}}{0+1}=\sqrt{\mathbf{2}}$$

Ejemplo 7.7. Calcular el límite $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+1}{x}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{x} &= \frac{\infty}{\infty} \qquad \text{dividimos por } x^3 \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{1}{x^3}} = \frac{2-0}{0} = \infty
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 7.8. Calcular el límite $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+x}{x^3}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+x}{x^3} &= \frac{\infty}{\infty} \qquad \text{dividimos por } x^3 \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1} = \frac{0+0}{1} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

□

7.3. Calculo de límites $\infty - \infty$

- **Se hacen operaciones**

  En los más sencillos basta realizar operaciones y simplificar.

Ejemplo 7.9. Calcular el límite $\lim_{x\to\infty} x - \dfrac{x^2-1}{x}$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x - \frac{x^2-1}{x} &= \infty - \infty \qquad \text{operamos}\\ = \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+1}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

□

Ejemplo 7.10. Calcular el límite $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x}{x} - x$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{x} - x &= \infty - \infty \qquad \text{operamos}\\ = \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = \mathbf{1}\end{aligned}$$

□

- **Por el conjugado**

Ejemplo 7.11. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x}-\sqrt{x}$ por el conjugado

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x}-\sqrt{x} &= \infty-\infty \qquad \text{por el conjugado}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} = \text{ se opera}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 7.12. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2}-x$ por el conjugado

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2}-x &= \infty-\infty \qquad \text{por el conjugado}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x} = \text{ se opera}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{\infty} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3. Calcular los límites siguientes::

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{3}{x^2-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{3}{x^2-1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x}$

Ejercicio 4. Calcular los límites siguientes::

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2x+1}{x-1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{3+x}{x^2-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{2x-3}{3x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{-3+x}{x-1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1-x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{1+x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{-x}{2-x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}$

Ejercicio 5. Calcular los límites siguientes dividiendo por la mayor potencia cuando sea necesario:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x + \frac{1}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{1+3x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x-1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{x^{4,98}+1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}$

Ejercicio 6. Calcular los límites siguientes por la técnica de descomposición:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2+3x-10}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2+4x-5}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4}}$

Ejercicio 7. Calcular los límites siguientes aplicando la técnica del conjugado::

a) $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} \frac{2-\sqrt{x}}{x-4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{2-\sqrt{x+2}}{x-2}$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

7.4. Calculo de límites $a^{\pm\infty}$

Analicemos el comportamiento de $\mathbf{a^x}$ con $0 < a \neq 1$ en algunos ejemplos

Ejemplo 7.13.

- $1{,}2^5 = 2{,}4883 \qquad 1{,}2^{15} = 15{,}4070 \qquad 1{,}2^{35} = 590{,}6682$
- $0{,}8^5 = 0{,}3277 \qquad 0{,}8^{15} = 0{,}0352 \qquad 0{,}8^{35} = 0{,}00040565$

Así cuando x crece, las potencias de **a** se hacen tan grandes como queramos o tan pequeñas como queramos dependiendo de si **a** es mayor o menor que 1.

$$\blacktriangleright\ a > 1 \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \qquad \blacktriangleright\ a < 1 \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \tag{1}$$

Teniendo en cuenta la expresión

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = (\frac{1}{a})^x$$

se obtienen las expresiones

$$\blacktriangleright\ a > 1 \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \qquad \blacktriangleright\ a < 1 \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \tag{2}$$

Ejemplo 7.14.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 1{,}2^x = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} 1{,}2^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{7}{3}\right)^x = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{7}{3}\right)^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^x = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^x = +\infty$

Test. Responde a las cuestiones:

1. El $\lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}2^x$ es:

(a) 0 (b) $-\infty$ (c) ∞

2. El $\lim\limits_{x\to+\infty} 3{,}1^{-x}$ es:

(a) 0 (b) $-\infty$ (c) ∞

3. El $\lim\limits_{x\to-\infty} 3{,}1^{-x}$ es:

(a) 0 (b) $-\infty$ (c) ∞

4. El $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{3}{2})^x$ es:

(a) 0 (b) $-\infty$ (c) ∞

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

7.5. Calculo de límites $f(x)^{g(x)}$

Si no hay problemas de indeterminación , el cálculo de dichos límites se realiza por paso al límite

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

Ejemplo 7.15. Los siguientes límites son inmediatos con la regla anterior

Solución:

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{x} = (2)^{+\infty} = +\infty$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{3x}\right)^{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{3x}\right)^{-2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} = +\infty$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{3x-1}\right)^{-x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-\infty} = 0$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^{-2x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty} = +\infty$$

□

8. El número e

Uno de los límites de mayor importancia lo estudió el matemático suizo Leonard Euler (1707-1783).

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Si pasamos al límite se tiene la expresión 1^∞, que nos hace pensar en las potencias de 1 y por tanto concluir erróneamente que $1^\infty = 1$.

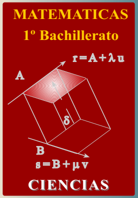
Este no es el caso pues $1+\dfrac{1}{x}\neq 1$ para cualquier valor de x.

Para mostrarlo realicemos una tabla

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
10	2,59374246	10000	2,71814592
100	2,70481382	100000	2,71826823
1000	2,71692393	1000000	2,71828046

El límite corresponde a uno de los números más importantes de la matemática, el número **e**

$$\mathbf{e} = 2,718281828459045235360287471352\,7\cdots$$



El número e

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathbf{e} \tag{3}$$

El mismo resultado se obtiene si sustituimos x por cualquier variable que tienda a infinito.

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=\mathbf{e}$$

Los siguientes límites dan todos el número **e**.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}=e \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}=e \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{x^3}=e \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{10\,x}\right)^{10\,x}=e$$

8.1. Calculo de límites $1^{\pm\infty}$

Todos los límites de la forma α^β donde $\left\{\begin{array}{c}\beta\to\infty\\ \alpha\to 1\end{array}\right.$, se pueden escribir como

$$\alpha^\beta = [1+(\alpha-1)]^{\dfrac{1}{\alpha-1}\beta(\alpha-1)}$$

y como

$$\alpha\to 1 \Longrightarrow \frac{1}{\alpha-1}\to\infty$$

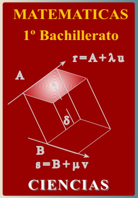
$$\left[1+\frac{1}{\frac{1}{\alpha-1}}\right]^{\dfrac{1}{\alpha-1}} \to \mathbf{e} \Longrightarrow \alpha^\beta \to e^{\beta(\alpha-1)}$$

En general se tiene que

entonces

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty\\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=1\end{array}\right. \qquad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)[f(x)-1]} \quad (4)$$

Esta es la fórmula que se utiliza para los límites de la forma $1^{\pm\infty}$.



Ejemplo 8.1. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{x}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{x} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{2x+1}{2x}-1\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{2x}\right)} = \mathbf{e^{1/2}} = \sqrt{e}$$

□

Ejemplo 8.2. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{-2x}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{-2x} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} -2x\left(\frac{2x+1}{2x-1}-1\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} -2x\left(\frac{2}{2x-1}\right)} = \mathbf{e^{-2}}$$

□

Ejercicio 8. Calcular los límites siguientes del tipo del número **e**:

$a)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$ $b)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^{-2x}$

$c)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x}{x^2-1}\right)^{x^2}$ $d)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^{x+3}$

Ejercicio 9. Calcular los límites siguientes del tipo del número **e**:

$a)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{x}$ $b)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{3x}$

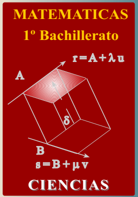
$c)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-1}\right)^{-x}$ $d)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^{3x}$

Ejercicio 10. Hallar los límites siguientes de potencias de una forma inmediata pues no necesitan ninguna técnica especial :

$a)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ $b)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$

$c)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x}{2x-1}\right)^{x}$ $d)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+3x}{2x}\right)^{-x}$

$e)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $f)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^{\frac{2x+1}{x}}$



Ejercicio 11. Calcular los límites siguientes dividiendo por la mayor potencia de x :

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+6}{4x^2-3}$

$b)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-2x+1}{x^4+x^2-4}$

$c)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{2x}}}{\sqrt{x-\sqrt{2x}}}$

$d)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x\sqrt{2x\sqrt{2x}}}}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$

Ejercicio 12. Calcular los límites siguientes aplicando la técnica del conjugado:

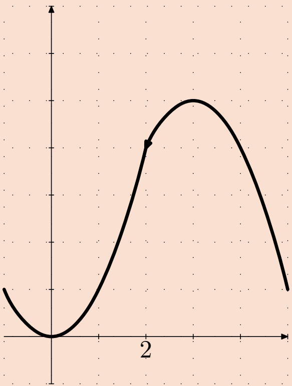
$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x}$

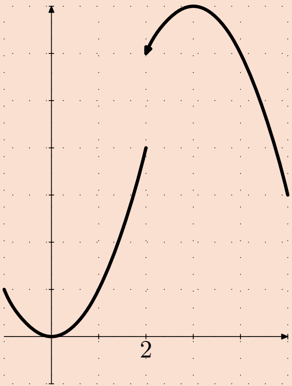
$b)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2}$

9. Continuidad

9.1. ¿Qué es una función continua?

Para una primera aproximación gráfica, si piensas en el grafo de una función, decimos que una función es continua cuando podemos recorrer el grafo de la función si tener que realizar ningún salto. Observa las figuras de abajo





La función de la izquierda no presenta ningún salto y decimos que es continua. La función de la derecha presenta un salto en el punto $x = 2$. Decimos que no es continua en este punto.

9.2. Definición de continuidad

Definición 9.1 *Sea f una función y $a \in Dom(f)$ decimos que f es continua en $x = a$ cuando*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \tag{5}$$

La continuidad de f en $x = a$ implica que se cumplan las condiciones:

1. La función está definida en $x = a$, es decir exista $f(a)$.
2. Exista el límite de f en $x = a$.
3. Los dos valores anteriores coincidan.

10. Discontinuidad

Definición 10.1 *Decimos que una función es discontinua en el punto $x = a$ cuando no es continua en $x = a$.*

Tipos de Discontinuidad

- Evitable, cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$
- Salto finito, cuando $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
- Salto infinito, cuando algún lateral $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ es infinito

A continuación analizamos cada uno de los tipos de discontinuidad que hemos clasificado en el cuadro superior

10.1. Discontinuidad Evitable

Decimos que una función en el punto $x = a$ presenta una discontinuidad evitable cuando existe $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ (finito) , pero no coincide con $f(a)$.

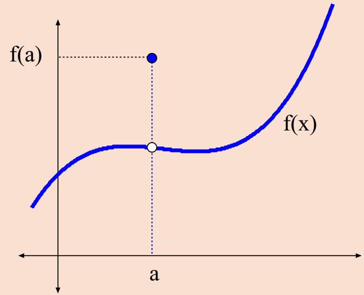
Se tiene que los límites laterales coinciden

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

pero

$$f(a) \neq L$$

$$\boxed{\exists \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)}$$



Ejemplo 10.1. Analizar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Solución: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ pero $f(1)$ no existe, en $x = 1$ presenta una discontinuidad evitable.

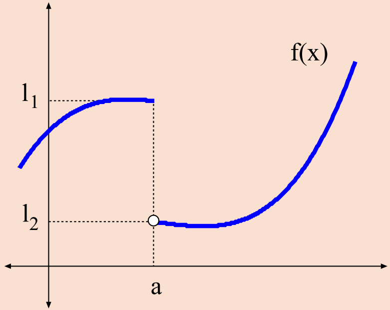
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \end{aligned}$$

$\square$

10.2. Discontinuidad de salto finito

Decimos que una función en el punto $x = a$ presenta una discontinuidad de salto finito cuando existe los límites laterales y son distintos.

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) & = & l_1 \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) & = & l_2 \end{array}\right\} l_1 \neq l_2$$



El salto de la función viene dado por

$$\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Ejemplo 10.2. Analizar la continuidad de $f(x) = \left\{\begin{array}{cc} x+1 & x \leq 0 \\ x^2-1 & 0 < x \end{array}\right.$

Solución: En $x = 0$, $f(0) = 1$, pero los límites laterales

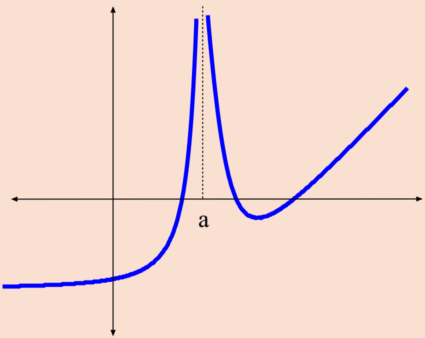
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x+1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2-1 = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(0^-) \neq f(0^+)$$

son distintos, luego en $x = 0$ hay una discontinuidad de salto finito. □

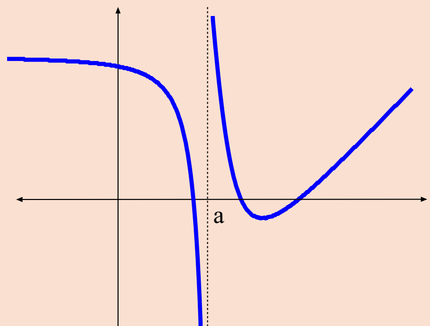
10.3. Discontinuidad de salto infinito

Decimos que una función en el punto $x = a$ presenta una discontinuidad de salto infinito cuando algún límite lateral de $f(x)$ en $x = a$ es infinito. En las figuras se muestran dos ejemplos de salto infinito en $x = a$.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$



Estas funciones presentan una discontinuidad de salto infinito en $x = a$.

MATEMATICAS
1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
Límites y Continuidad
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejemplo 10.3. Hallar a para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \leq 1 \\ a\,x - 2 & 1 < x \end{cases}$$

Solución:
Para que sea continua en $x = 1$

$$f(1^-) = 0 = f(1^+) = a - 2 \Longrightarrow \boxed{a = 2}$$

□

Ejercicio 13. Hallar a para que las funciones sean continuas en $x = 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} x + a & x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} a^2\,x & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} a\,x & x \leq 1 \\ x - a & 1 < x \end{cases}$

d) $y(x) = \begin{cases} a^2\,x + 2 & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$

Ejercicio 14. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & -1 < x \leq 1 \\ \ln x & 1 < x \end{cases}$$

a) Hallar a para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$

b) ¿Es continua en $x = 1$?

◀ Pulsa y elige el botón Funciones a Trozos y realiza la siguiente práctica con las funciones del ejercicio 13.

Práctica 10.1.

a) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x+a & x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<1 ? x+a:2` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón de los valores de a y observa que la función es continua cuando $a = 1$.

b) Sea la función: $g(x) = \begin{cases} a^2\,x & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<1 ? a^2*x:1` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón de los valores de a y observa que la función es continua cuando $a = \pm 1$.

c) Sea la función: $h(x) = \begin{cases} a\,x & x \leq 1 \\ x-a & 1 < x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<1 ? a*x:x-a` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón de los valores de a y observa que la función es continua cuando $a = 0{,}5$.

d) Sea la función: $y(x) = \begin{cases} a^2\,x+2 & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<0 ? a^2*x+2:1` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón de los valores de a y observa que la función es discontinua para cualquier valor de a.

◀

11. Asíntotas

En este apartado usaremos el concepto de límite para mostrar el aspecto gráfico de las funciones.

Cuando una función en la proximidad de un punto $x = \mathbf{a}$ o en el **infinito** se aproxima a una recta tanto como queramos decimos que tiene una **asíntota** o que la función tiene una rama asintótica. En caso contrario decimos que tiene una rama **parabólica**.

- Las funciones polinómicas $y = P(x)$ no tienen asíntotas, solo ramas parabólicas.
- Las funciones racionales $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios puede tener asíntotas de tres tipos:
  - *a*) asíntota horizontal
  - *b*) asíntota vertical
  - *c*) o asíntota oblicua

Vamos a analizar con detalle estos tres tipos para las funciones racionales.

11.1. Asíntota Vertical

> **Asíntota Vertical** Cuando en un punto $x = a$ se tiene
> $$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$
> decimos que la función presenta una rama infinita o asíntota Vertical

Ejemplo 11.1. Halla y representa la asíntota vertical de $y = \dfrac{1}{x}$

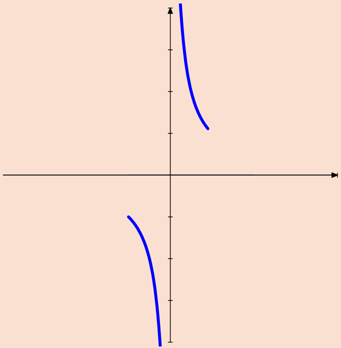
Solución:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

tiene como asíntota vertical el eje OY, $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



□

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 11.2. Halla la asíntotas de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

Solución:

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ tiene $x = 1$.

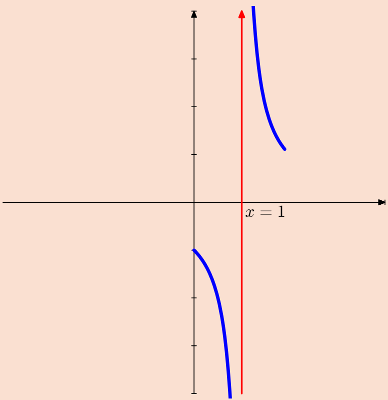
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

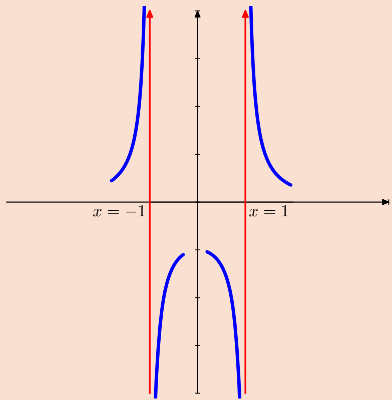
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ tiene $x = \pm 1$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$$





□

Ejemplo 11.3. Halla y representa la asíntota vertical de $y = \dfrac{1}{x^2 - 2\,x}$

Solución:

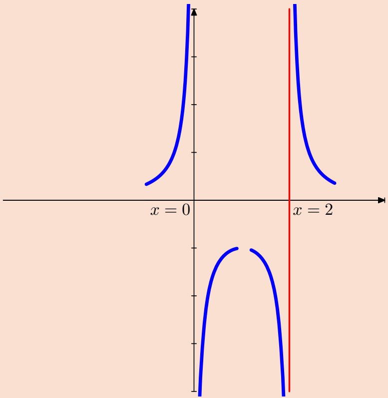
$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2\,x}$ dos asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 2$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2 - x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2 - x} = +\infty$$



$\square$

Ejercicio 15. Hallar y representar, si las hay, las asíntotas verticales de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2 + x}{3 - x}$ *b*) $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

11.2. Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal Cuando se tiene

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

decimos que la función tiene la asíntota horizontal $y = L$

Ejemplo 11.4. Halla y representa la asíntota horizontal de $y = \dfrac{1}{x}$

Solución:

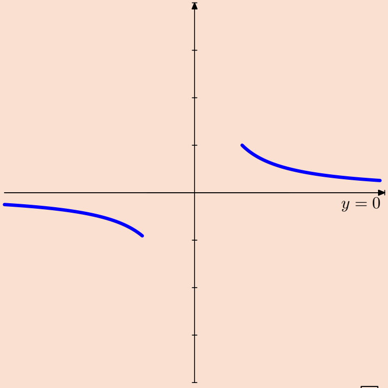
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene $y = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Para dibujarla, lo más cómodo es dar valores grandes a x.

$$\text{Si } x > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} > 0$$

$$\text{Si } x < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} < 0$$



□

Ejemplo 11.5. Halla y representa la asíntota horizontal de $y = \dfrac{x+1}{x}$

Solución:

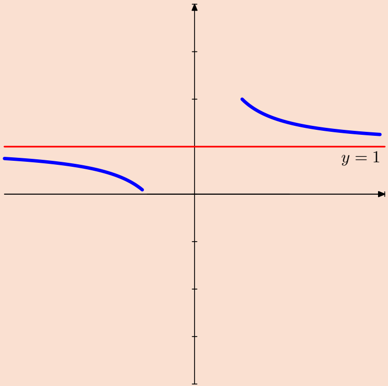
Asíntotas horizontal $y = 1$ pues

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Para dibujarla, lo más cómodo es dar valores «grandes» a x.

$$\text{Si } x = 10 \Longrightarrow \frac{10+1}{10} > 1$$

$$\text{Si } x = -10 \Longrightarrow \frac{(-10)+1}{-10} < 1$$



$\square$

Ejercicio 16. Hallar y representar, si las hay, las asíntotas horizontales de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2+x}{3-x}$ *b*) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

Test. Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, responder a:

1. El dominio de $f(x)$ es:

(a) R (b) $R - \{1\}$ (c) $R - \{0\}$

2. El $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ es:

(a) 2 (b) $+\infty$ (c) -∞

3. El $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ es:

(a) -2 (b) $+\infty$ (c) -∞

4. El $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1

5. El $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1

6. La asíntota horizontal de la función es:

(a) ninguna (b) $y = 1$ (c) $y = -1$

7. La asíntota vertical de la función es:

(a) ninguna (b) $x = -1$ (c) $x = 1$

11.3. Asíntota Oblicua

Una función $f(x)$ en la proximidad del infinito $x \to \infty$ decimos que tiene como asíntota oblicua, cuando se aproxima a una recta

$$y = mx + n$$

Primero explicamos como calcularlas para las funciones racionales y después damos una expresión más general. Sea la función

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Si dividimos, la podemos expresar como

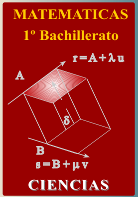
$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

y para valores de x tan grandes como queramos, cuando $x \to \infty$, como $\dfrac{1}{x} \to 0$ tenemos que

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \approx \boxed{\text{x}}$$

es decir para valores de x "grandes" la función toma valores cercanos a x, y por tanto su gráfica se aproxima a la recta $y = x$. En este caso la asíntota oblicua es

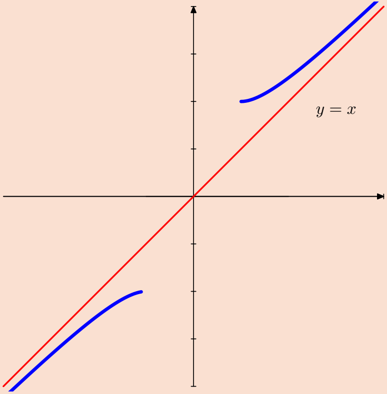
$$y_o = x$$



$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

Aíntota oblicua $y = x$

$$x \to +\infty \quad f(x) > x$$
$$x \to -\infty \quad f(x) < x$$



Asíntota Oblicua La función racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

tiene la asíntota oblicua $y_0 = C(x)$ siempre y cuando el grado del numerador sea una **unidad mayor** que el grado del denominador.

MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
Límites y Continuidad
Doc Doc Volver Cerrar

Así pues para determinar la asíntota oblicua se dividen los polinomios y se toma el cociente cuando es de grado uno, es decir una recta. En el siguiente ejemplo se muestra como se calcula.

Ejemplo 11.6. Veamos algunos ejemplos:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x-1} = \boxed{x-1} + \frac{3}{x-1} \qquad y_o = x-1$$

$$g(x) = \frac{3x^2-1}{x+1} = \boxed{3x-3} + \frac{2}{x+1} \qquad y_o = 3x-3$$

$$h(x) = \frac{x^2+x+1}{1-x} = \boxed{-x-2} + \frac{3}{1-x} \qquad y_o = -x-2$$

$$j(x) = \frac{x^3+1}{x} = \boxed{x^2} + \frac{1}{x} \qquad \text{No hay oblicua}$$

$$k(x) = \frac{x+1}{x} = \boxed{1} + \frac{1}{x} \qquad y = 1 \text{ horizontal}$$

$$h(x) = \frac{2-x^2}{x} = \boxed{-x} + \frac{2}{x} \qquad y_o = -x$$

Ejercicio 17. Hallar y representar, si las hay, las asíntotas oblicuas de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2+x^2}{2+x}$ *b*) $g(x) = \dfrac{x^2-2}{1-x}$

Ejemplo 11.7. Hallar y representar la oblicua de $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

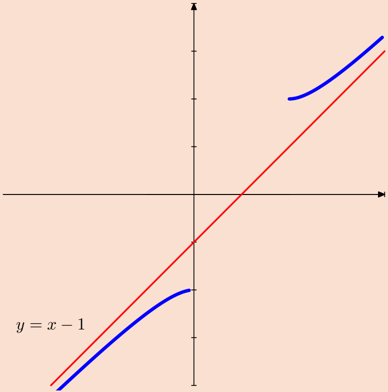
Solución:

Dividimos y

$$\frac{x^2}{x+1} = \boxed{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$y_o = x - 1$$

$$\bullet\ \underbrace{f(x) > x-1}_{x\to+\infty} \quad \underbrace{f(x) < x-1}_{x\to-\infty}$$



Para explicar la posición • de la curva respecto a la asíntota, lo más fácil, es dar un valor a x lo suficientemente grande, y comparar el valor de la función y de la asíntota. Por ejemplo en $x = 10$ y $x = -10$.

$$f(10) = 9{,}09 \quad y_0(10) = 9 \Longrightarrow f(x) > y_0$$

$$f(-10) = -11{,}11 \quad y_0(-10) = -11 \Longrightarrow f(x) < y_0$$

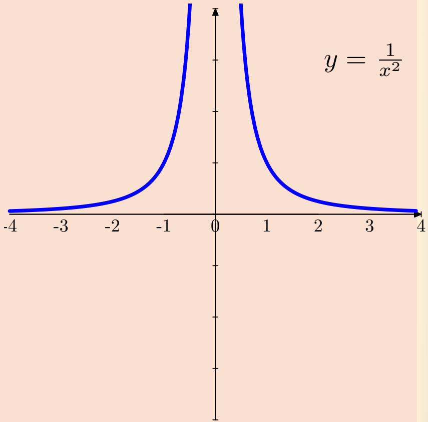
□

Ejemplo 11.8. Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{1}{x^2}$$

Solución:

Ramas del Infinito de $\frac{1}{x^2}$	
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2}$	0
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2}$	0



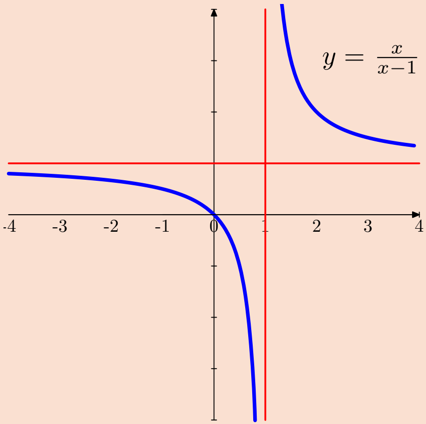
La función presenta:

- una asíntota vertical en $x = 0$
- una asíntota horizontal $y = 0$

$\square$

12. Cuestionarios

Inicio del Test A partir de la gráfica de la función $f(x)$, responder a:



1. El dominio de $f(x)$ es:

(a) $\mathcal{R}$ (b) $\mathcal{R} - \{1\}$

2. El $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ es:

(a) 2 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

3. El $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ es:

(a) -2 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

4. El $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) $-\dfrac{1}{2}$

5. El $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1

Final del Test Puntos:

Inicio del Test Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, responder a:

1. El dominio de $f(x)$ es:

(a) $\mathcal{R}$ (b) $\mathcal{R} - \{2\}$ (c) $\mathcal{R} - \{1\}$

2. El $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ es:

(a) 2 (b) $+\infty$ (c) -∞

3. El $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ es:

(a) -2 (b) $+\infty$ (c) -∞

4. El $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) $-\dfrac{1}{2}$

5. El $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1

6. La asíntota vertical de $f(x)$ es:

(a) $x = 2$ (b) $x = 0$ (c) no tiene

Final del Test Puntos:

Inicio del Test Dada la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, responder a:

1. El dominio de $f(x)$ es:

(a) $\mathcal{R}$ (b) $\mathcal{R} - \{-1\}$ (c) $[0, \infty)$ (d) $(0, \infty)$

2. El límite en $x = -1$ por la derecha, $f(-1^+)$ es:

(a) $\nexists$ (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

3. El $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ es:

(a) $\nexists$ (b) $+\infty$ (c) $\dfrac{1}{2}$

4. El $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) $-\dfrac{1}{2}$

5. El $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) ∞

Final del Test Puntos: Correctas

En las siguientes cuestiones abreviamos $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ como $f(+\infty)$

Inicio del Test A partir de las funciones,

$$f(x) = (1{,}3)^{2x} \qquad g(x) = (0{,}3)^{2x}$$

responder a las cuestiones.

1. El valor de $f(+\infty)$ es?

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

2. El valor de $f(-\infty)$ es?

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

3. El valor de $g(+\infty)$ es?

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

4. El valor de $g(-\infty)$ es?

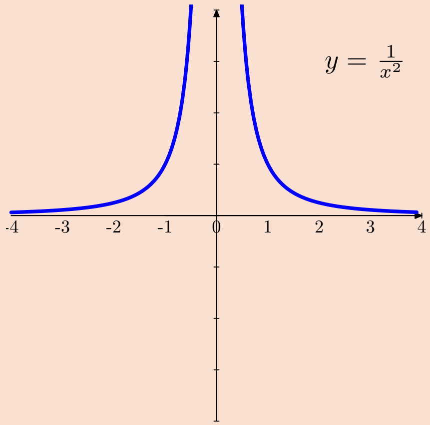
(a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

5. El valor de $g(\infty)$ es?

(a) $\nexists$ (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

Final del Test Puntos:

Inicio del Test A partir de la gráfica de la función $f(x)$, responder a:



1. El dominio de $f(x)$ es:

(a) $\mathcal{R}$ (b) $\mathcal{R} - \{0\}$

2. El $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ es:

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) -∞

3. El $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ es:

(a) -2 (b) $+\infty$ (c) -∞

4. El $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) $+\infty$

5. El $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1

Final del Test Puntos: Correctas

Ejercicio 18. Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{1}{x-1}$$

Ejercicio 19. Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{x}{x-1}$$

Ejercicio 20. Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{1}{x^2-1}$$

Ejercicio 21. Estudia y representa con las asíntotas la función:

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

Ejercicio 22. Estudia y representa con las asíntotas la función:

$$y = \frac{x^2-4}{x+1}$$

Ejercicio 23. Estudia y representa con las asíntotas la función:

$$y = \frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Estas funciones son de tipo racional y presentan puntos donde divergen a infinito en los valores que anulan el denominador.

a) $f(x) = \dfrac{2}{3x}$. En $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{3x} = \frac{2}{0} = \infty$$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$. En $x = \pm 1$

$$\lim_{x \to -1} \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{2}{0} = \infty \qquad \lim_{x \to 1} \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{2}{0} = \infty$$

c) $h(x) = \dfrac{x}{1 + x}$. En $x = -1$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{1 + x} = \frac{-1}{0} = \infty$$

Ejercicio 1

Ejercicio 2. Indicar el comportamiento de las funciones cuando x tiende a infinito:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2}{3x} = \frac{2}{\infty} = 0$

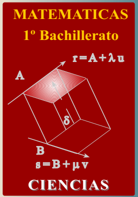
b) Dividimos por x^2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

c) Dividimos por x^2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}} = \frac{1+0}{0} = \infty$$

Ejercicio 2



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 3.

$$a)\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$b)\quad \lim_{x\to 1^+} \frac{3}{x^2-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$c)\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$d)\quad \lim_{x\to 1^-} \frac{3}{x^2-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$e)\quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f)\quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Ejercicio 3

Ejercicio 4.

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{0+1}{0-1} = \mathbf{-1}$$

$$b)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{3+x}{x^2-1} = \frac{3+0}{0-1} = \mathbf{-3}$$

$$c)\ \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-3}{3x} = \frac{2-3}{3} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

$$d)\ \lim_{x\to 1^-} \frac{-3+x}{x-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$e)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{-\infty} = \mathbf{0}$$

$$f)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{1+x} = +\infty$$

$$g)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{-x}{2-x} = \mathbf{1}$$

$$h)\ \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Ejercicio 4

Ejercicio 5. En el caso necesario dividimos por la mayor potencia:

a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

b) $$\lim_{x\to\infty} x + \frac{1}{x} = \infty + 0 = \infty$$

c) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{1+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+3} = \frac{2-0}{0+3} = \frac{2}{3}$$

d) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

e) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{x^{4,98}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{x^{4,98}} = \infty$$

f) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \nexists$$

Ejercicio 5

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6. Se descompone en factores y se simplifica:

a)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+3x-10}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+5}=\frac{3}{7}$$

b)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+4x-5}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x+5}=-\frac{1}{3}$$

c)

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{x-5}=\frac{10}{0}=\infty$$

d)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 6

Ejercicio 7. En estos límites aplicamos la técnica del conjugado:

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4^+} \frac{2-\sqrt{x}}{x-4} = \frac{0}{0} &= \lim_{x\to 4^+} \frac{2-\sqrt{x}}{x-4}\cdot\frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to 4^+} \frac{4-x}{(x-4)(2+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\to 4^+} \frac{-1}{2+\sqrt{x}} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} \frac{2-\sqrt{x+2}}{x-2} = \frac{0}{0} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{2-\sqrt{x+2}}{x-2}\cdot\frac{2+\sqrt{x+2}}{2+\sqrt{x+2}} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{(x-2)(2+\sqrt{x+2})} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{-1}{2+\sqrt{x+2}} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ejercicio 7

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8. En estos límites aplicamos la fórmula 4:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = 1^{\infty} = e^{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3x(1+\frac{1}{x}-1)} = \mathbf{e^3}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{-2x} = 1^{\infty} = e^{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -2x(\frac{2}{x^2})} =$$

$$= e^{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{4}{x}} = e^0 = \mathbf{1}$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{x^2-1}\right)^{x^2} = 1^{\infty} = e^{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x^2(\frac{x}{x^2-1})}$$

$$= e^{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{x^2-1}} = e^{-\infty} = \mathbf{0}$$

d) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^{x+3} = e^{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x+3)(\frac{8}{x})} = \mathbf{e^8}$$

Ejercicio 8

MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
Límites y Continuidad
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 9. En estos límites aplicamos la fórmula 4:

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{x+2}{x+3}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+3}} = \mathbf{e^{-1}}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3x} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} 3x\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{x-1}} = \mathbf{e^{6}}$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}\right)^{-x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} -x\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2-x}{x^2-1}} = \mathbf{e^{-1}}$$

d)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^{3x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} 3x\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{\sqrt{x}-1}} = +\infty$$

Ejercicio 9

Ejercicio 10.

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\mathbf{0}$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=+\infty$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{2x-1}\right)^{x}=\left(\frac{5}{2}\right)^{+\infty}=+\infty$$

d) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{2x}\right)^{-x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty}=\mathbf{0}$$

e) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=\mathbf{1}$$

f) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{\frac{2x+1}{x}}=(2)^{2}=\mathbf{4}$$

Ejercicio 10

Ejercicio 11. En el caso necesario dividimos por la mayor potencia:

$$a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6}{4x^2-3} \equiv \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4x^2} = \mathbf{1/4}$$

$$b)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x+1}{x^4+x^2-4} \equiv \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{x^4} = \mathbf{3}$$

$$c)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{2x}}}{\sqrt{x-\sqrt{2x}}} \equiv \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \mathbf{1}$$

$$d)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x\sqrt{2x\sqrt{2x}}}}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} \equiv \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[8]{2^7\,x^7}}{\sqrt[8]{x^7}} = \sqrt[8]{2^7}$$

Ejercicio 11

Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 12. En estos límites aplicamos la técnica del conjugado:

a)

$$\begin{aligned}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x} &= \frac{\infty-\infty}{0} \\ &= \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{-1}{\infty} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2} = \infty-\infty$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x} = \mathbf{1/2}\end{aligned}$$

Ejercicio 12

MATEMATICAS 1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
LÍMITES Y CONTINUIDAD
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 13.

a) Para que $f(x) = \begin{cases} x + a & x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$ sea continua en $x = 1$

$$f(1^-) = 1 + a = f(1^+) = 2 \Longrightarrow \boxed{a = 1}$$

b) Para que $g(x) = \begin{cases} a^2\,x & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$ sea continua en $x = 1$

$$g(1^-) = a^2 = g(1^+) = 1 \Longrightarrow \boxed{a = \pm 1}$$

c) Para que $h(x) = \begin{cases} a\,x & x \leq 1 \\ x - a & 1 < x \end{cases}$ sea continua en $x = 1$

$$h(1^-) = a = h(1^+) = 1 - a \Longrightarrow \boxed{a = 1/2}$$

d) Para que $y(x) = \begin{cases} a^2\,x + 2 & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$ sea continua en $x = 1$

$$y(1^-) = a^2 + 2 = y(1^+) = 1 \Longrightarrow a^2 = -1$$

no existe ningún valor de a que haga continua la función.

Ejercicio 13

MATEMATICAS
1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
Límites y Continuidad
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 14.

Siendo $f(x) = \begin{cases} 2x + a & x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & -1 < x \leq 1 \\ \ln x & 1 < x \end{cases}$

a) Para que sea continua en $x = -1$

$$f(-1^-) = -2 + a = f(-1^+) = 1 \Longrightarrow \boxed{a = 3}$$

b) ¿Es continua en $x = 1$? No, pues

$$f(1^-) = 1 \neq f(1^+) = \ln 1 = 0$$

Ejercicio 14

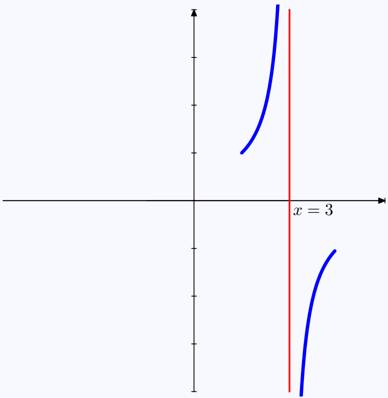
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 15.

$$f(x) = \frac{2+x}{3-x} \text{ en } x = 3$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2+x}{3-x} = -\infty$$

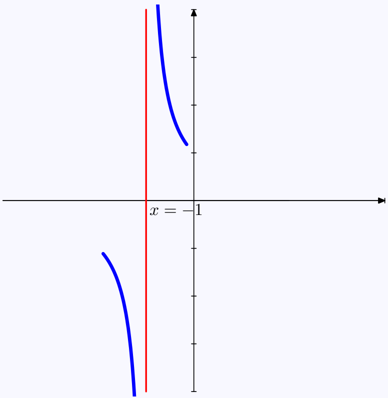
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2+x}{3-x} = +\infty$$



$$g(x) = \frac{x^2}{x+1} \text{ en } x = 0$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$$



Ejercicio 15

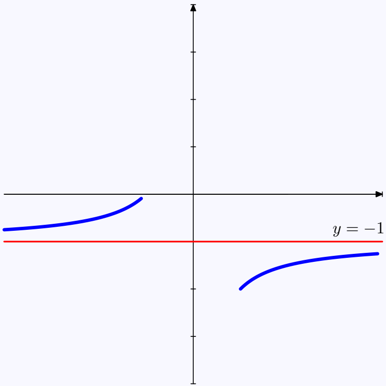
Ejercicio 16.

$$f(x) = \frac{2+x}{3-x} \text{ tiene } y - 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+x}{3-x} = -1$$

$$\text{Si } x = 10 \Longrightarrow \frac{2+10}{3-10} < -1$$

$$\text{Si } x = -10 \Longrightarrow \frac{2-10}{3+10} > -1$$

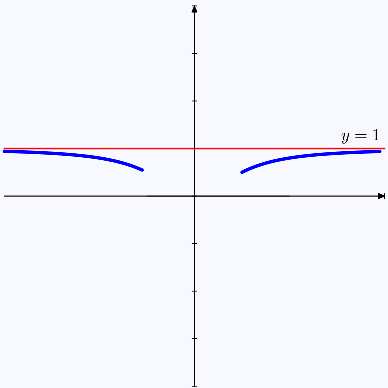


$$g(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \text{ tiene } y = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

$$\text{Si } x = 10 \Longrightarrow \frac{100}{100+1} < 1$$

$$\text{Si } x = -10 \Longrightarrow \frac{100}{100+1} < 1$$



Ejercicio 16

Ejercicio 17.

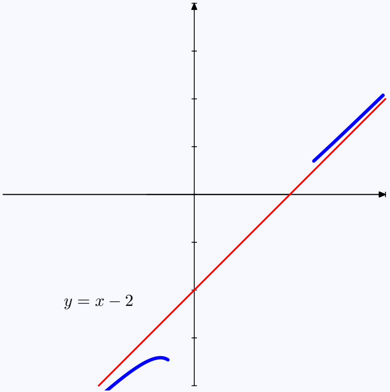
$$f(x) = \frac{2+x^2}{2+x} \qquad\qquad g(x) = \frac{x^2-2}{1-x}$$

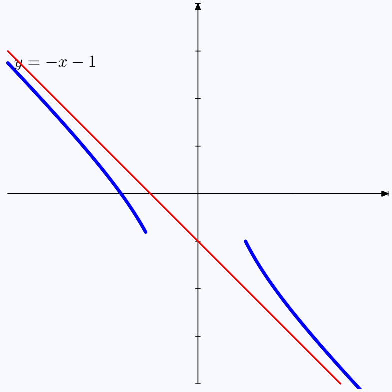
Oblicua $y_o = x - 2$

$$f(10) = 8{,}5 > y_o(10) = 8$$
$$f(-10) = -12{,}75 < y_o(-10) = -12$$

Oblicua $y_o = -x - 1$

$$h(10) = -10{,}8 > y_o(10) = -11$$
$$h(-10) = 8{,}9 < y_o(-10) = 9$$

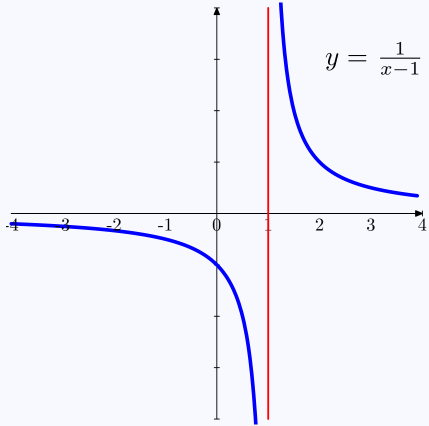




Ejercicio 17

Ejercicio 18.

Ramas del Infinito de $\dfrac{1}{x-1}$	
$\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$	$+\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$	$-\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x-1}$	0
$\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x-1}$	0



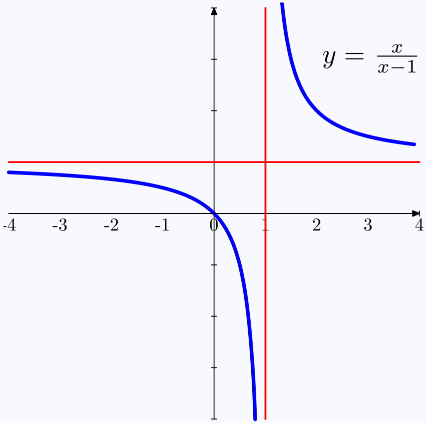
La función presenta:

- una asíntota vertical en $x = 1$
- una asíntota horizontal $y = 0$

Ejercicio 18

Ejercicio 19.

Ramas del Infinito de $\dfrac{x}{x-1}$	
$\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1}$	$+\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1}$	$-\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-1}$	1
$\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x-1}$	1



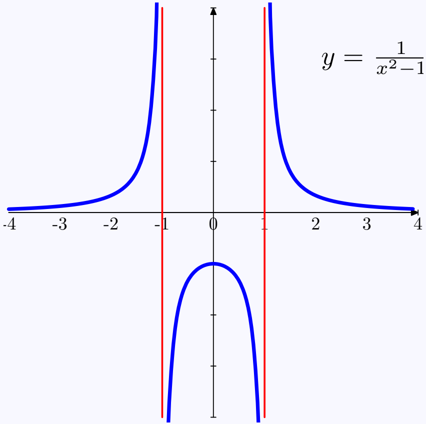
La función presenta:

- una asíntota vertical en $x = 1$
- una asíntota horizontal $y = 1$

Ejercicio 19

Ejercicio 20.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$	
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$	0
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$	0



La función presenta:

- dos asíntotas verticales en $x = \pm 1$
- una asíntota horizontal $y = 0$

Ejercicio 20

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 21.

- Horizontal no tiene
- Vertical $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$$

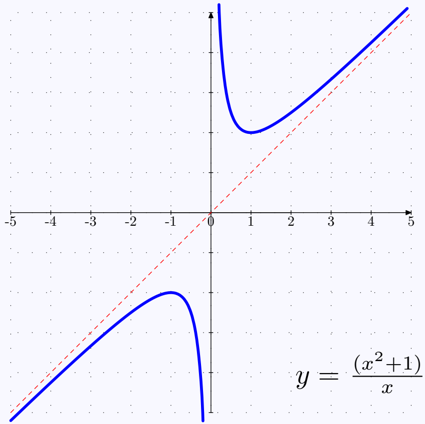
- Oblicua $y_o = x$, pues

$$\frac{x^2+1}{x} = \boxed{x} + \frac{1}{x}$$

Posición:

$$f(10) = 10{,}1 > y_0(10) = 10$$

$$f(-10) = -10{,}1 < y_0(-10) = -10$$



Ejercicio 21

Ejercicio 22.

- Horizontal no tiene
- Vertical $x = -1$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+1}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+1}{x+1} = +\infty$$

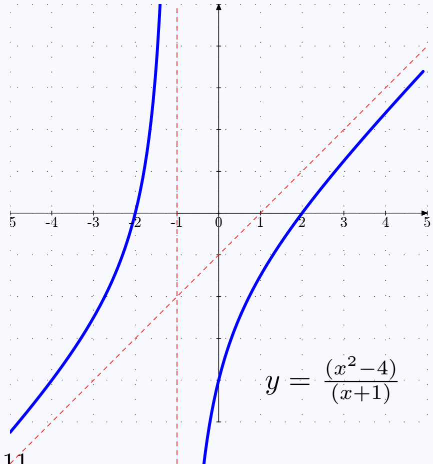
- Oblicua $y_o = x - 1$, pues

$$\frac{x^2-4}{x+1} = \boxed{x-1} - \frac{3}{x-1}$$

Posición:

$$f(10) = 8{,}72 < y_0(10) = 9$$

$$f(-10) = -10{,}66 > y_0(-10) = -11$$



Ejercicio 22

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 23.

- Horizontal no tiene
- Vertical $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = +\infty$$

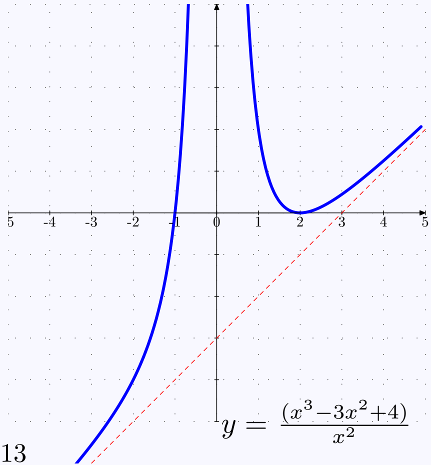
- Oblicua $y_o = x - 3$, pues

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = \boxed{x - 3} + \frac{4}{x^2}$$

Posición:

$$f(10) = 7{,}04 > y_0(10) = 7$$

$$f(-10) = -12{,}96 > y_0(-10) = -13$$



Ejercicio 23

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Soluciones a los Tests

Solución al Test: En efecto

- **Asíntota vertical** $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$$

- **Asíntota horizontal**, $y = 1$, pues cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x+1}{x-1} = \mathbf{1}$$

Final del Test

Índice alfabético